ENCICLOPEDIA DELLA SCIENZA E DELLA TECNICA

estratti

vi minori. Una poligonale, di cui si siano determinate le coordinate cartesiane dei vertici, può costituire un'intelaiatura sufficiente per rilevare i dettagli del terreno, quando l'estensione sia limitata. Per rilievi piú estesi occorre una rete di triangolazione: tipiche sono, in Italia, la triangolazione geodetica, rilevata dall'Istituto Geografico Militare, e la triangolazione catastale. Nella triangolazione geodetica la posizione di ciascun vertice è espressa dalle sue coordinate geografiche: latitudine e longitudine. Nella triangolazione catastale invece si osservano le coordinate rettangolari. Apposite tabelle consentono il rapido passaggio dal sistema delle coordinate geografiche a quelle rettangolari e viceversa. Il rilievo della rete di appoggio è caratterizzato da un grande numero di misure esuberanti, cioè superiori a quello strettamente necessario, il che consente altrettanti controlli e una compensazione rigorosa. Nella scelta dei vertici della rete si dà particolare importanza alla forma dei triangoli, che si deve avvicinare, per quanto possibile, a quella equilatera, evitando gli angoli inferiori a 30°.

La triangolazione per il rilievo di una città può riuscire talvolta laboriosa, per la mancanza di intervisibilità tra i vertici, il che comporta numerose stazioni ausiliarie. Nel caso che si debbano collimare vertici molto lontani, le misure si eseguono molto vantaggiosamente di notte, con l'aria piú trasparente, facendo uso di segnali luminosi.

La distanza che si misura sul terreno, per ottenere la lunghezza di un lato della triangolazione, va riferita al livello del mare: occorre quindi apportare al valore ottenuto dalla misura, una riduzione che dipende dalla quota del terreno e dal raggio della sfera terrestre (FIG. 6).

Oltre ai vertici della triangolazione, che costituiscono i punti di riferimento orizzontali, la rete d'appoggio comprende inoltre i capisaldi verticali, determinati mediante una livellazione geometrica di precisione.

Il livello impiegato per queste livellazioni deve possedere particolari requisiti: il micrometro ottico, posto davanti all'obiettivo, che consente di puntare sulla stadia; la vite di elevazione per centrare la livella, che si osserva nel campo stesso del cannocchiale.

Anche le stadie, costituite da un nastro di invar, terminanti inferiormente con un puntale e che si fanno appoggiare su uno zoccolo, sono da considerare come altrettanti strumenti di precisione. I dislivelli e quindi le quote sono determinati con l'approssimazione di 0,1 mm.

Si vedano anche le voci TACHEOMETRO; TEODOLITE; RILIEVO E DISEGNO TOPOGRAFICO; STRADA; GALLERIA; MINIERA.

GUIDO GOLINELLI

Bibliografia: L. Solaini, *Topografia*, Milano (1956); R. E. Davis, F. S. Foote, *Surveying*, New York (1953); P. Tardi, G. Laclavère, *Traité de géodésie*, Parigi (1951); G. Cicconetti, *Trattato di geodesia e topografia*, Milano (1938).

Topologia

La Topologia, detta anche talvolta *analysis situs*, potrebbe essere descritta provvisoriamente e in modo approssimativo come una branca della Geometria che studia proprietà di carattere qualitativo: in essa cioè non si eseguiscono delle misure, ma al massimo dei conteggi, i cui risultati sono atti a rappresentare proprietà di carattere qualitativo delle figure.

La Topologia come branca della Geometria è relativamente recente; il nome Topologia è dovuto a Listing (1848), tuttavia i primi procedimenti aventi genuino carattere topologico si possono far risalire a Eulero (1707-1783), per esempio al suo classico teorema che afferma l'impossibilità di risolvere il problema dei sette ponti di Königsberg, per il quale si rimanda alla voce GRAFI, TEORIA DEI.

Un altro teorema che viene attribuito comunemente a Eulero (ma che fu scoperto prima di lui da R. Descartes) e che può avere un significato tipicamente topologico è quello che riguarda la relazione intercedente tra il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di un poliedro ordinario convesso.

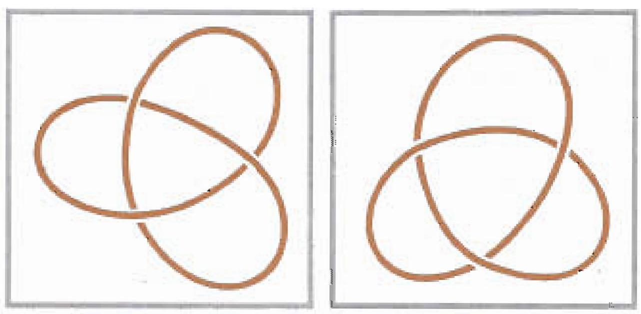
Indicando con v, s, f, i numeri dei vertici, degli spigoli e delle facce, rispettivamente si ha:

$$v - s + f = 2. \qquad (1)$$

Si immagini ora di deformare comunque il poliedro con continuità, senza operare sulla sua superficie né lacerazioni né duplicazioni (deformando, per esempio, la superficie del poliedro nella superficie di una sfera e immaginando che durante la deformazione rimangano 'segnati' spigoli e vertici come linee tracciate sulla superficie e intersezioni tra esse). La proprietà espressa dalla (1) diventa allora la proprietà di un reticolato tracciato su una qualunque superficie che si possa deformare nella superficie sferica, cioè su una superficie semplicemente connessa e bilatera.

Altri risultati di natura strettamente topologica si devono a K. F. Gauss che espresse mediante un integrale un numero intero che rappresenta la *concatenazione* di due curve chiuse tra loro. Anche in questo caso evidentemente, dato il significato di tale numero, esso rimane invariato quando si immaginino le linee concretamente realizzate con materiale deformabile e si deformino comunque le due linee stesse senza provocare disgiunzioni o attraversamenti.

Uno studio analogo si può fare sulle curve chiuse immerse nello spazio tridimensionale; è chiaro che un circuito chiuso che si ottiene per esempio per deformazione da una circonferenza non potrà mai essere portato a coincidere con il nodo a trifoglio a sinistra nella figura e che questo non potrà



Due nodi a trifoglio dei quali è facile vedere, sotto le condizioni specificate nel testo, la non equivalenza topologica con una circonferenza. I due nodi non sono neppure equivalenti fra loro.

mai essere portato a coincidere con l'altro nodo a trifoglio a destra nella figura che invece si può ottenere deformando una immagine speculare del primo.

Altre fondamentali ricerche di carattere topologico sono dovute a B. Riemann, in relazione ai suoi studi sulle superfici (oggi chiamate *superfici di Riemann*) che illustrano il comportamento delle funzioni di variabile complessa (in particolare funzioni algebriche), e a Kirchhoff in relazione ai suoi studi sui circuiti elettrici.

Il primo esempio di superficie unilatera venne dato da Möbius con la classica superficie che porta il suo nome (nastro di Möbius) e altre ricerche di importanza fondamentale si devono a F. Klein, Betti e soprattutto a H. Poincaré. Con Poincaré si potrebbe dire che termina il primo periodo della storia della Topologia, periodo in cui questa scienza studia prevalentemente figure dello spazio tridimensionale, e inizia un secondo periodo in cui lo studio si estende metodicamente alle varietà e agli spazi topologici aventi piú di tre dimensioni. In epoca piú recente, infine, la Topologia ha ricevuto una assiomatizzazione rigorosa ed è stata trattata con metodi formali astratti, trovando inoltre applicazione nei campi piú svariati.

Ricordiamo ancora che anche gli studi sulla struttura del continuo, iniziati con i lavori di R. Dedekind e G. Cantor, forniscono un altro filone di teorie e risultati che si possono a ragione far rientrare nella Topologia. Il classico teorema di Jordan (che dà le condizioni perché una curva chiusa nel piano divida questo in due regioni, l'una di punti interni e l'altra di punti esterni, regioni delle quali la curva è confine comune) è di carattere strettamente topologico; come pure ha un significato topologico l'esempio fornito da G. Peano di una 'curva' continua che riempie un intero quadrato. In quest'ordine di idee gli studi sugli insiemi di punti della retta, del piano e dello spazio, sulla misura e sull'integrazione e moltissime teorie moderne di Analisi matematica si fondano su basi che appartengono alla Topologia, tanto che alcuni autori distinguono nella Topologia moderna due grandi rami: il ramo della topologia algebrica e quello della topologia degli insiemi di punti, a seconda della prevalenza di interessi, di metodi e di atteggiamenti in cui le ricerche e le esposizioni vengono fatte.

Volendo tentare di inquadrare la Topologia, considerata come una branca della Geometria, nella classificazione che si fonda sul *programma di Erlangen* di Klein, possiamo riferirci agli esempi che abbiamo dato poco sopra. Abbiamo parlato di deformazioni delle figure considerate, deformazioni che non separassero parti connesse tra loro oppure portassero a coincidere punti distinti.

Ora se due figure F e F' sono ottenute l'una dall'altra con una deformazione cosiffatta, si può determinare una corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua tra i loro punti. Si dimostra che tutte le corrispondenze cosiffatte formano un gruppo; esse vengono chiamate *omeomorfismi* (concetto che tratteremo in seguito con maggiore precisione e astrattezza); pertanto la Topologia, o almeno una sua parte cospicua, si potrebbe anche descrivere come quella parte della Geometria che tratta delle proprietà delle figure che sono invarianti per il gruppo degli omeomorfismi.

Occorre tuttavia fare una distinzione preliminare di fondamentale importanza sul concetto di corrispondenza continua e ciò in relazione all'eventuale ambiente in cui la figura o le figure di cui si tratta si ritengono immerse.

Invero è chiaro, per esempio, che tra i punti di due curve regolari chiuse si può sempre stabilire una corrispondenza continua e biunivoca senza eccezioni; non è detto tuttavia che tale corrispondenza si possa sempre supporre subordinata da una corrispondenza cosiffatta intercedente tra gli ambienti in cui le due curve si ritengono immerse. Per esempio, è chiaro che una circonferenza e una curva annodata (per esempio a forma di nodo a trifoglio come mostrata nella figura) pur potendo essere poste in corrispondenza biunivoca e continua tra loro non si possono ritenere deformabili l'una nell'altra, cioè non si possono ottenere con omeomorfismi dello spazio ambiente. Analoga osservazione va fatta a proposito dei 'modelli' di superfici bilatere chiuse con cui vengono rappresentate le superfici di Riemann relative alle funzioni algebriche di una variabile complessa: un modello cosiffatto è in corrispondenza biunivoca e continua senza eccezioni con la superficie di Riemann ma non si può ritenere ottenuto da questa con omeomorfismi dello spazio ambiente.

Principali proprietà topologiche delle figure nello spazio ordinario. Come abbiamo già visto, le figure dello spazio ordinario sono state le prime studiate dal punto di vista della Topologia; le proprietà piú frequentemente studiate sono quelle delle curve (nodi, trecce) e delle superfici.

Uno dei problemi principali della teoria dei nodi è quello di studiare certi invarianti in modo da poter stabilire quando due nodi sono trasformabili l'uno nell'altro mediante un omeomorfismo. Analogo studio viene fatto per le figure formate da due o piú curve chiuse annodate tra loro. Analoghi problemi vengono studiati dalla teoria delle trecce; quest'ultima fu collegata in modo particolarmente elegante con la teoria dei gruppi da Artin. Ricordiamo inoltre che O. Chisini ha usato in modo efficace le trecce nello spazio ordinario per illustrare il comportamento delle funzioni analitiche di due variabili, in modo particolare funzioni algebriche, ottenendo con questo mezzo la dimostrazione di fondamentali teoremi di esistenza nel campo delle funzioni algebriche di piú variabili.

Per quanto riguarda le superfici nello spazio ordinario, le proprietà che piú di frequente interessano la Topologia sono l'esistenza o meno di orli, il fatto che la superficie sia o non sia bilatera e certi caratteri numerici che si riferiscono ai reticolati tracciati sulla superficie. Tali proprietà sono trattate alla voce SUPERFICIE, alla quale si rimanda; si veda anche la voce SUPERFICI SPECIALI.

Assiomatizzazione della Topologia astratta. Daremo ora qualche cenno dell'impostazione astratta della Topologia, che si svincola dalla intuizione spaziale e procede con il metodo assiomatico, che garantisce il rigore alle deduzioni e permette le applicazioni dei risultati ai campi piú svariati.

Il punto di partenza è dato dal concetto primitivo (e quindi indefinito) di *insieme* e dalla formalizzazione delle operazioni su di esso.

Indicato con X un insieme e con x un suo elemento, si suole scrivere:

$$x \in X,$$

indicando con il simbolo $\in$ la relazione che lega un elemento all'insieme a cui appartiene.

Un elemento di un insieme X viene spesso chiamato un *punto* di X, anche se non sussiste nessun riferimento al concetto geometrico indicato con lo stesso nome.

Dati due insiemi X e Y, si indica con

$$X \cup Y$$

l'insieme (che viene anche chiamato *unione* o *riunione* di X con Y) formato da tutti gli elementi che appartengono almeno a uno dei due insiemi (senza escludere quelli che appartengono a entrambi). Si indica poi con

$$X \cap Y$$

e si legge *intersezione* di X con Y, l'insieme formato da quegli elementi (se ve ne sono) che appartengono a entrambi gli insiemi X e Y.

Si considera anche l'insieme vuoto e lo si indica con $\emptyset$. Pertanto la notazione

$$X \cap Y = \emptyset$$

sta a indicare che non esistono elementi che appartengono a entrambi gli insiemi X e Y, perché la loro intersezione è l'insieme vuoto; in tal caso i due insiemi vengono anche detti *disgiunti*.

Sia dato un insieme I e si supponga che a ogni suo elemento i corrisponda un insieme A_i; l'insieme che è formato da tutti gli insiemi come A_i viene indicato con $\{A_i\}_{i\in I}$. L'insieme I viene anche detto *insieme degli indici* e col simbolo $\bigcup_{i\in I} A_i$ si conviene di indicare l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a uno almeno degli insiemi $\{A_i\}_{i\in I}$; tale insieme viene anche chiamato unione degli insiemi stessi. Analogamente si indica col simbolo $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'insieme formato dagli elementi che appartengono a tutti gli insiemi dell'insieme $\{A_i\}_{i\in I}$. Esso è anche chiamato intersezione dell'insieme stesso.

Considerato un insieme X, un insieme A viene detto *sottoinsieme* di X se ogni elemento di A appartiene anche a X; l'insieme vuoto viene considerato come sottoinsieme di ogni insieme.

Dato un insieme X e una collezione di sottoinsiemi di X, tali sottoinsiemi si dicono sottoinsiemi aperti o anche semplicemente *aperti* di X se soddisfano ai seguenti assiomi:

1) l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme X stesso sono sottoinsiemi aperti di X;

2) se A e B sono sottoinsiemi aperti, anche l'intersezione $A \cap B$ è un sottoinsieme aperto;

3) se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una collezione di sottoinsiemi aperti di X allora anche $\bigcup_{i\in I} A_i$ è un sottoinsieme aperto di X.

Per esempio sia R l'insieme dei numeri reali; indicato con r un numero reale, sia $|r|$ il valore assoluto di r. L'insieme R può essere considerato come uno spazio topologico con le seguenti convenzioni: un sottoinsieme U di R viene detto aperto se, per ogni $x \in U$ vi è un numero reale ε_x maggiore di zero avente la proprietà che, se per qualche numero reale y si ha:

$$|x - y| < \varepsilon_x,$$

allora $y \in U$. In altre parole U è aperto quando, se $x \in U$, allora ogni numero abbastanza vicino a x appartiene pure a U. Con questa definizione di aperto si verifica facilmente che gli assiomi degli spazi topologici sono soddisfatti.

Quando in Matematica si parla di numeri reali, abitualmente si parla dell'insieme dei numeri reali considerato come uno spazio topologico, con la topologia di insiemi aperti definiti poco fa.

Per proseguire la trattazione degli spazi topologici è necessario introdurre qualche altra nozione di teoria degli insiemi. Dati due insiemi X e Y si definisce *prodotto cartesiano* degli insiemi stessi l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di elementi tali che $x \in X$ e $y \in Y$. Tale prodotto viene indicato con la notazione convenzionale $X \times Y$.

Una funzione f definita in X e avente valori in Y è un sottoinsieme di $X \times Y$ tale che se $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ tale che la coppia $(x, y) \in f$.

L'elemento y viene anche chiamato il *valore* della funzione al punto x e indicato con $f(x)$.

Pertanto intuitivamente una funzione risulta essere una legge di corrispondenza univoca tra elementi di X ed elementi di Y; la notazione abituale di una corrispondenza cosiffatta è $f: X \to Y$.

Sia ora $f: X \to Y$ una funzione e sia U un sottoinsieme aperto di Y; si indica con $f^{-1}(U)$ il sottoinsieme di X formato da tutti i punti x tali che $f(x) \in U$. Allora, se X e Y sono spazi topologici, la funzione $f: X \to Y$ si dice *continua* (e si chiama anche rappresentazione continua di X in Y) se $f^{-1}(U)$ è un sottoinsieme aperto di X ogni volta che U è un sottoinsieme aperto di Y.

Per esempio, se X è uno spazio topologico, la rappresentazione identica $i: X \to X$ definita da $i(x) = x$, cioè la corrispondenza che associa a ogni elemento x l'elemento stesso, è una corrispondenza continua.

Se X, Y e Z sono spazi topologici e sono date due corrispondenze continue $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, allora anche la funzione $f \circ g: X \to Z$ definita dalla condizione $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ è una rappresentazione continua.

Due spazi topologici X e Y si dicono *omeomorfi* se esistono due rappresentazioni continue $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ tali che $f \circ g: Y \to Y$ sia l'identità in Y e $g \circ f: X \to X$ sia l'identità in X. In questo caso la funzione g viene spesso indicata con f^{-1} e chiamata l'*inversa* di f.

Per esempio si supponga ancora di avere l'insieme R dei numeri reali e di considerare una funzione f: R $\to$ R tale che $f(x) = 0$ se $x < 0$, $f(x) = 1$ se $x \geqslant 0$. Tale funzione non è continua perché risulta $f(0) = 1$ ma vi sono punti arbitrariamente vicini allo zero nei quali $f(x) = 0$.

Dal punto di vista intuitivo la funzione continua $f: X \to Y$ è una corrispondenza tale che quando x e x' sono *vicini*, anche $f(x)$ ed $f(x')$ sono vicini, la relazione di vicinanza essendo definita dalla condizione di appartenere a certi insiemi aperti degli spazi X e Y.

Un ulteriore passo nello studio degli spazi topologici viene fatto con la considerazione degli spazi metrici. Si dice che uno spazio topologico X è stato metrizzato se è stata definita una funzione $\delta: X \times X \to$ R che soddisfa ai seguenti assiomi:

1) se $x \in X$, $x' \in X$, allora $\delta(x, x') \geqslant 0$ e si ha $\delta(x, x') = 0$ se e soltanto se x coincide con x';

2) si ha sempre:

$$\delta(x, x') = \delta(x', x);$$

3) se anche $x'' \in X$ si ha:

$$\delta(x, x') + \delta(x', x'') \geqslant \delta(x, x'').$$

La funzione $\delta(x, x')$ viene anche chiamata *distanza* tra i due punti x e x'; l'assioma 1) dice che la distanza tra due punti è sempre non negativa e che l'essere la distanza uguale a zero è condizione necessaria e sufficiente perché i punti stessi coincidano. L'assioma 2) dice che la distanza tra x e x' è uguale alla distanza tra x' e x; infine l'assioma 3) viene anche chiamato *assioma del triangolo* perché traduce una proprietà che vale quando x, x', x'' siano interpretati come punti dello spazio ordinario e la distanza sia concepita nel modo solito.

Considerato un insieme X, se è definita una funzione distanza su di esso $\delta: X \times X \to$ R, si suol dire che un sottoinsieme U di X è aperto se, nell'ipotesi $x \in U$, esiste un numero reale positivo ε_x tale che ogni punto x' per cui si ha:

$$\delta(x, x') < \varepsilon_x,$$

appartiene pure a U. Si verifica facilmente che con la definizione di insieme aperto qui adottata, restano soddisfatti gli assiomi degli insiemi aperti; se ne può concludere che l'introduzione di una funzione di distanza su un insieme X permette di trasformare questo insieme in uno spazio topologico.

Per esempio, nell'insieme R dei numeri reali, se si pone $\delta(x, x') = |x - x'|$, si verifica facilmente che la funzione ora definita si può considerare una distanza perché soddisfa alle condizioni poste e che la nozione di insieme aperto cosí definito coincide con quella data precedentemente.

Siano ora due spazi topologici X e Y e si supponga definita su X una funzione di distanza $\delta: X \times X \to$ R e su Y un'altra funzione di distanza $\delta': Y \times Y \to$ R; si supponga inoltre di aver definito la nozione di insieme aperto su X mediante la distanza δ e analogamente di aver definito la nozione di insieme aperto su Y mediante la distanza δ'.

Allora si può dimostrare che una funzione $f: X \to Y$ è una rappresentazione continua di X in Y se e soltanto se per ogni $x \in X$ e per ogni numero reale positivo ε_x esiste un numero reale positivo η_x tale che se $\delta(x, x')$ è minore di η_x anche $\delta'(f(x), f(x'))$ è minore di ε_x.

Uno dei procedimenti piú importanti in Topologia è la costruzione di nuovi spazi topologici a partire da certi spazi dati; partendo da due spazi topologici X e Y si può considerare anche lo spazio prodotto $X \times Y$ come uno spazio topologico, convenendo di dire che un sottoinsieme U di $X \times Y$ è aperto se per ogni punto $(x, y) \in U$ esistono un sottoinsieme aperto V di X e un sottoinsieme aperto W di Y tali che $x \in V$ e $y \in W$.

In tal modo è facile per esempio definire lo spazio euclideo a n dimensioni. Invero l'insieme R dei numeri reali viene chiamato spazio euclideo *a una dimensione* e indicato anche con R^1, con la Topologia che abbiamo già considerata; allora lo spazio a un numero qualunque di dimensioni viene definito per induzione, ponendo R^{n+1} uguale al prodotto topologico di R^n per R^1.

Molto spesso lo spazio euclideo a n dimensioni viene anche definito come l'insieme delle n-ple ordinate di numeri

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

convenendo di definire come distanza di due punti qualunque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ l'espressione:

$$d = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,.$$

Si verifica che questa definizione coincide con la definizione abituale quando $n = 2$ e $n = 3$, cioè quando si tratti del piano euclideo e dello spazio ordinario e in generale verifica gli assiomi della distanza.

Un'altra nozione di fondamentale importanza per la Topologia è quella di *ricoprimento*. Sia $\mathfrak{X}$ uno spazio topologico e sia data una collezione $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi aperti di $\mathfrak{X}$ tali che $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} A_i$; allora la collezione $\{A_i\}_{i \in I}$ viene chiamata un ricoprimento di $\mathfrak{X}$. Se è dato un secondo ricoprimento $\{B_j\}_{j \in J}$ di $\mathfrak{X}$, il primo viene detto *piú fine* del secondo se per ogni indice $i \in I$ esiste un indice $j \in J$ tale che A_i è un sottoinsieme di B_j.

Sia ora un ricoprimento dello spazio $\mathfrak{X}$ con una collezione di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$. Tale ricoprimento si dice avere dimensione non superiore a n se l'intersezione

$$A_{i_0} \cap A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}$$

di $(n + 1)$ insiemi ricoprenti qualunque è vuota. Cosí, per esempio, un ricoprimento ha dimensione minore o uguale a zero se l'intersezione di due aperti $A_i \cap A_j$ è vuota quando i due aperti sono diversi, cioè quando $i \neq j$.

Si dice che lo spazio topologico $\mathfrak{X}$ ha dimensione n se n è il minimo intero che ha la seguente proprietà: per ogni ricoprimento di $\mathfrak{X}$ vi è un ricoprimento piú fine che ha dimensione non superiore a n.

Con questa definizione di dimensione si ha facilmente che due spazi topologici hanno uguale dimensione se sono omeomorfi e che lo spazio euclideo R^n è uno spazio topologico a n dimensioni. Il concetto di dimensione cosí definito è un invariante topologico.

La nozione di ricoprimento permette di definire altre importanti proprietà degli spazi topologici. La piú importante tra esse è la compattezza: uno spazio topologico $\mathfrak{X}$ viene chiamato *compatto* se per ogni ricoprimento con un insieme di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$ esiste un numero finito di indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tali che si abbia $\mathfrak{X} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Per esempio definita la sfera ad n dimensioni come l'insieme dei punti di uno spazio euclideo R^{n+1} che hanno da un punto dato una data distanza, si ha facilmente che tale sfera è un compatto. Si dimostra poi che il prodotto $X \times Y$ di due compatti è pure un compatto: cosí si ha, per esempio, che risulta essere compatto il toro, definito come il prodotto di due 'sfere' ad una dimensione.

Per molti scopi la nozione di spazio topologico che abbiamo fin qui trattata risulta essere troppo generale; vengono quindi introdotte delle restrizioni, che si ottengono abitualmente imponendo che lo spazio debba soddisfare ad altri assiomi, oltre a quelli enunciati. In particolare uno di questi è il cosiddetto *assioma di separazione di Hausdorff*. Si dice che uno spazio topologico $\mathfrak{X}$ soddisfa all'assioma di Hausdorff o brevemente che è uno spazio di Hausdorff se, dati due punti qualunque x e x' di $\mathfrak{X}$ esistono due insiemi aperti U e V di $\mathfrak{X}$ tali che $x \in U$, $x' \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Si dimostra che, se $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ sono spazi compatti di Hausdorff ed f: $X \to Y$ è una rappresentazione continua di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ tale che $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$ e che per ogni $y \in \mathfrak{Y}$ esiste un $x \in \mathfrak{X}$ tale che $y = f(x)$, allora f è un omeomorfismo.

Tutti gli spazi finora considerati sono spazi di Hausdorff: la sfera, gli spazi euclidei e i sottospazi di questi spazi e i prodotti di due spazi che siano spazi di Hausdorff sono pure spazi di Hausdorff; inoltre se $\mathfrak{X}$ è uno spazio topologico e se la sua topologia è definita da una funzione distanza definita su $\mathfrak{X}$ allora $\mathfrak{X}$ risulta essere uno spazio di Hausdorff.

Tuttavia, benché gli spazi di Hausdorff siano di grandissimo interesse, vi è una sottoclasse ancora piú ristretta di spazi topologici che viene particolarmente studiata: tali spazi vengono chiamati *varietà topologiche*. Una varietà topologica ad n dimensioni è uno spazio $\mathfrak{X}$ di Hausdorff che soddisfa inoltre alle seguenti condizioni:

1) per ogni punto $x \in \mathfrak{X}$ esiste un sottoinsieme aperto U di $\mathfrak{X}$ tale che $x \in U$ ed U è omeomorfo a un sottoinsieme aperto di R^n;

2) esiste una funzione di distanza δ: $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathrm{R}$ tale che la topologia su $\mathfrak{X}$ è determinata da tale funzione.

La condizione 1) dice sostanzialmente che la struttura della varietà, a una distanza abbastanza piccola da un punto fissato, è quella di uno spazio euclideo a n dimensioni. La condizione 2) viene spesso sostituita con altre equivalenti.

Per procedere ulteriormente occorre qui introdurre un'altra nozione di carattere generale: uno spazio topologico $\mathfrak{X}$ si dice *connesso* se, presi due qualunque sottoinsiemi U e V di $\mathfrak{X}$ tali che $\mathfrak{X} = U \cup V$, si ha che l'intersezione $U \cap V$ è non vuota. In altre parole uno spazio $\mathfrak{X}$ è connesso se non può essere espresso come unione di due sottospazi disgiunti.

Uno dei piú importanti problemi di Topologia è la classificazione delle varietà connesse a n dimensioni.

Se $\mathfrak{X}$ è una varietà connessa di dimensione 1 allora si danno solo due casi: o $\mathfrak{X}$ è compatta e allora è omeomorfa alla sfera a una dimensione (circonferenza), o non è compatta e allora è omeomorfa all'insieme R di tutti i numeri reali.

Il problema di classificare tutte le varietà a 2 dimensioni è pure stato risolto ed è stato dato un elenco di varietà cosiffatte tale che una varietà qualunque è omeomorfa a una della lista. Poco si sa sulla classificazione delle varietà aventi piú di due dimensioni.

Uno dei capitoli che recentemente ha avuto maggiore sviluppo è la teoria della *omotopia*. Considerati due spazi $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$, due rappresentazioni continue f_0: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ e f_1: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ si dicono tra loro omotopiche se esiste una rappresentazione continua F: $I \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ (dove con I abbiamo indicato l'intervallo unitario, cioè l'insieme di tutti i numeri reali non minori di zero e non superiori a 1) tale che $F(0, x) = f_0(x)$ ed $F(1, x) = f_1(x)$.

Una corrispondenza f: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ si dice *banale* se $f(x) = f(x')$ per ogni coppia di punti x e x' appartenentia $\mathfrak{X}$. Una corrispondenza f: $X \to Y$ si dice omotopicamente banale se esiste una corrispondenza banale f_0 che è omotopica a f. In altre parole due corrispondenze sono omotopiche tra loro se l'una può essere deformata con continuità nell'altra. Si ha allora che se $\mathfrak{X}$ è una varietà connessa a due dimensioni e ogni rappresentazione della sfera a una dimensione S^1 in $\mathfrak{X}$ è omotopicamente banale, allora $\mathfrak{X}$ è omeomorfa alla superficie sferica bidimensionale o al piano euclideo.

Si dice che due spazi topologici $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ hanno lo stesso tipo omotopico o sono omotopicamente dello stesso tipo se esiste una trasformazione f: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ e un'altra g: $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ tali che $f \circ g$: $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ sia omotopica all'identità in $\mathfrak{Y}$ e $g \circ f$: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ sia omotopica all'identità in $\mathfrak{X}$. Si ha quindi che due spazi omeomorfi tra loro hanno lo stesso tipo omotopico, ma non è vero il viceversa; per esempio, lo spazio euclideo a n dimensioni è omotopicamente dello stesso tipo di uno spazio che è ridotto a un unico punto.

Si ha anche che se $\mathfrak{X}$ è una varietà connessa a n dimensioni e se per ogni $q > n$ la rappresentazione della sfera a q dimensioni in x è omotopicamente banale, allora $\mathfrak{X}$ è compatta e ha omotopicamente lo stesso tipo della sfera a n dimensioni, oppure non è compatta e ha omotopicamente lo stesso tipo dello spazio euclideo a n dimensioni.

La grossa difficoltà della classificazione delle varietà sta nel fatto che a tutt'oggi non si può affermare che $\mathfrak{X}$ sia omeomorfa alla sfera a n dimensioni o allo spazio euclideo a n dimensioni.

Lo studio dell'omotopia viene proseguito con metodi algebrici, collegando la teoria dell'omotopia con la teoria dei gruppi. L'inizio di trattazioni cosiffatte si deve a Poincaré, che introdusse il *gruppo fondamentale* di una varietà, assumendo come elementi del gruppo i cammini chiusi che passano per un determinato punto della varietà stessa e identificando due cammini che siano tra loro omotopici.

L'Algebra fornisce pure gli strumenti per lo studio di altri enti della Topologia (gruppi di omologia e di coomologia), enti che trovano applicazione nella Geometria e nei rami piú svariati della Matematica.

CARLO FELICE MANARA

Bibliografia: R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la Matematica*, Torino (^{2}1961); J. L. Kelley, *General Topologie*, Londra (^{4}1961); D. Hilbert, S. Cohn Vossen, *Geometria intuitiva*, Torino (1960); P. Alexandrov, *Topologia combinatoria*, Torino (1957); P. Alexandrov, H. Hopf, *Topologie*, I, Berlino (1935).

Topologica, psicologia

Il 'campo psicologico' secondo K. Lewin (1890-1936) può essere adeguatamente rappresentato dalla Topologia, in quanto scienza che studia lo spazio in funzione dei rapporti di posizione. Lewin nella sua opera *Principles of topological psychology* (1936) si dichiara convinto che la Psicologia sia oggi in grado di progredire superando le distinzioni di scuola; per questo dice di aver utilizzato il linguaggio matematico, « oggettivo e non speculativo », dal momento che esprime solo l'ordine strutturale degli eventi.

Spesso la Psicologia ha adottato i metodi dei fisici per rappresentare la realtà: in particolare il concetto di *campo* è stato introdotto in Psicologia dalla scuola della forma. Anche per Lewin, allievo di Wertheimer e collaboratore di W. Kohler per molti anni, la teoria del campo consiste in un insieme di concetti per mezzo dei quali si può rappresentare la realtà psicologica. Questi concetti dovrebbero essere abbastanza ampi per essere applicati a ogni sorta di comportamento e, nello stesso tempo, abbastanza specifici per rappresentare una data persona in una data situazione concreta.

Il campo è « la totalità dei fatti coesistenti che sono concepiti come mutuamente interdipendenti »; la persona (P) e il suo ambiente (A) sono *regioni* interdipendenti del campo psicologico totale o *spazio vitale* (S) (FIG. 1). Lo spazio vitale contiene la totalità dei fatti possibili che sono in grado di determinare la condotta di un individuo; insieme al mondo fisico (dal quale è separato mediante un confine) fa parte di una piú ampia totalità o *universo*.

I fatti che esistono nella regione esterna e adiacente al confine dello spazio vitale (*corteccia esterna* dello spazio vitale) possono influenzare materialmente l'ambiente psicologico; il primo passo di un'indagine psicologica per poter determinare ciò che è possibile e ciò che non lo è, e che cosa